

УДК 551.466.8

## ТРАНСФОРМАЦИЯ КОРОТКИХ ВОЛН В ПОЛЕ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА. ВЛИЯНИЕ МОДУЛЯЦИИ ВЕТРОВОГО ИНКРЕМЕНТА

*К. А. Горшков, И. С. Долгина, И. А. Соустова, Ю. И. Троицкая*

Построена модель трансформации спектра коротких поверхностных волн при наличии неоднородного течения на поверхности воды, учитывающая модуляцию инкремента ветровых волн. Для расчёта модулированного инкремента использована модель турбулентного приводного слоя атмосферы, в которой для описания турбулентных напряжений в ветре использована градиентная аппроксимация с модельным коэффициентом вихревой вязкости, задаваемым на основании имеющихся лабораторных экспериментов. Рассмотрены примеры модуляции коротких волн при наличии неоднородных течений на поверхности, создаваемых волнами зыби и интенсивными внутренними волнами. Показано, что существенное влияние на инкремент коротких волн и его модуляцию оказывает деформация профиля скорости ветра и его длинноволнового возмущения за счёт нелинейного взаимодействия ветровых поверхностных волн с ветром. Для случая волн зыби эта деформация сводится к возрастанию параметра шероховатости профиля скорости ветра и модуляции параметра шероховатости с периодом волны зыби. Расчёт модулированного инкремента проведён в рамках квазилинейной модели генерации поверхностных волн турбулентным ветром, использующей гипотезу о случайных фазах поля ветровых волн. Амплитуда и фаза гидродинамической модуляционной передаточной функции рассчитаны в рамках релаксационной модели. Результаты расчёта удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Для описания поля течений, создаваемых интенсивными внутренними волнами на поверхности, использована модель, описываемая комбинированным уравнением Кортевега—де Вриза. Параметры внутренних волн взяты из эксперимента «COPE». Рассчитаны зависимости ветрового инкремента от фазы волнового цуга для различных значений скорости трения ветра и длины поверхностной волны при попутном и встречном направлении распространения внутренней волны относительно ветра. Результаты расчёта качественно согласуются с экспериментальными данными.

### ВВЕДЕНИЕ

Один из наиболее перспективных дистанционных методов исследования океана основан на измерении вариаций сигнала радиолокатора, рассеянного взволнованной водной поверхностью. Вариации принимаемого сигнала связаны с изменчивостью параметров ветрового волнения, которая, в свою очередь, обусловлена их трансформацией в поле неоднородных крупномасштабных течений на поверхности. Такие течения обусловлены различными процессами в верхнем слое океана: внутренними волнами, обтеканием островов и подводных возвышенностей и т. п. Характерные масштабы подобных течений составляют сотни метров. Такие же масштабы могут иметь длинные поверхностные волны, включая волны зыби. Изменчивость, вызванная такими крупномасштабными течениями, регистрируется в широком спектре ветрового волнения: для волн с длинами от нескольких метров до сантиметров. Модуляция амплитуды волн дециметрового диапазона в поле внутренних волн и неоднородных течений хорошо объясняется в рамках кинематического механизма [1]. В то же время механизм модуляции сантиметровых волн до конца не выяснен, несмотря на пристальный интерес к этому диапазону поверхностных волн, определяющих радиоизображение морской поверхности при брэгговском механизме его формирования. В середине 80-х годов была выдвинута гипотеза о «каскадном механизме» модуляции сантиметровых волн [2]. В последнее время было предложено физическое объяснение каскадного механизма

как модуляции вынужденных высших гармоник волн дециметрового диапазона [3]. Следует, однако, заметить, что, как показывает эксперимент, вынужденные гармоники дециметровых волн вносят существенный вклад в спектр ветрового волнения сантиметрового диапазона при сильных ветрах [3]. Кроме того, следует заметить, что при наличии на поверхности воды волн с острыми гребнями рассеяние радиоволн может определяться рассеянием на остриях таких гребней, при этом длина поверхностной и радиоволн не связаны резонансным брэгговским соотношением [4], и дециметровые поверхностные волны могут эффективно рассеивать сантиметровые радиоволны. Однако этот механизм становится эффективным лишь при достаточно сильных ветрах, когда существенная часть ветровых волн имеет острые вершины.

При слабых ветрах профили волн пологие, и основную часть поверхностного волнения составляют свободные волны, которые возбуждаются ветром. При этом вариации профиля скорости ветра, вызванные неоднородным течением на поверхности воды, приводят к возникновению модуляции инкремента коротких волн, которая может вносить существенный вклад в изменчивость спектра поверхностных волн сантиметрового диапазона. Эффект модуляции ветрового инкремента активно обсуждается в настоящее время в связи с проблемой определения гидродинамической модуляционной передаточной функции (МПФ) длинных поверхностных волн и зыби [5–9]. Кроме того, в последнее время обсуждается влияние этого эффекта на модуляцию волн сантиметрового диапазона в поле интенсивных внутренних волн [10].

В настоящей работе представлена теоретическая модель механизма модуляции инкремента коротких поверхностных волн при наличии неоднородных течений и обсуждается её применение к наблюдениям модуляции поверхностных волн при наличии волн зыби и интенсивных внутренних волн. В разделе 1 приведены основные уравнения, описывающие трансформацию спектра коротких поверхностных волн при наличии неоднородных течений на поверхности воды. В разделе 2 приведены основные уравнения, описывающие ветровой турбулентный пограничный слой над взволнованной водной поверхностью. В разделе 3 в рамках модели найдена гидродинамическая МПФ волн зыби и приведено сопоставление результатов модели и имеющихся экспериментальных данных. В разделе 4 описана модель модуляции волн сантиметрового диапазона в поле интенсивных внутренних волн и проведено сопоставление расчётов с данными эксперимента «COPE» [11].

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ МОДУЛЯЦИЮ СПЕКТРА КОРОТКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ

Модуляция коротких волн в поле неоднородных течений описывается кинетическим уравнением для спектра возвышений коротких волн  $F(K, x, t)$ . В простейшем случае, когда направления ветра, волн и течения совпадают и модуляция максимальна, уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [U_0(x, t) + C_{\text{гр}}] \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial K} = 2B[F, K, U, x, t] + \tilde{\eta} \frac{\partial U_0}{\partial x} F + \text{Int}[F, K]. \quad (1)$$

Здесь  $U_0(x, t)$  — неоднородное поле течений,  $K$  и  $\Omega$  — волновое число и частота короткой волны в лабораторной системе отсчёта,  $\Omega = KU_0(x, t) + \Omega_0$ ,  $\Omega_0$  — собственная частота короткой волны,  $B[F, K, U, x, t]$  — модулированный инкремент короткой волны, равный алгебраической сумме ветрового инкремента, определяемого скоростью ветра  $U$ , и декремента вязкой диссипации (это слагаемое зависит от поля длинной волны),  $\text{Int}[F, K]$  — «интеграл столкновений», определяющий нелинейное взаимодействие волн. Второе слагаемое в правой части — радиационное напряжение, а  $\tilde{\eta}$  — фактор растяжения, введённый в [12–14]. Заметим, что в уравнение для спектра волнового действия  $\tilde{N}$  радиационное напряжение не входит. При этом выражение для  $\tilde{\eta}$  может быть легко

получено из соотношения спектров волнового действия  $\tilde{N}$  и возвышений  $F$ , т. е.  $\tilde{\eta}$  определяется дисперсионными свойствами волн.

Для потенциальных волн при отсутствии дрейфового течения

$$\tilde{\eta} = C_{gr}/C_f - 1,$$

где  $C_{gr} = \partial\Omega_0/\partial K$  — групповая, а  $C_f = \Omega_0/K$  — фазовая скорости короткой волны.

Если неоднородное течение на поверхности воды достаточно слабое и вызываемые им вариации спектра коротких волн невелики, то для аппроксимации интеграла столкновений  $\text{Int}[F, K]$  в (1) можно воспользоваться релаксационной моделью, предложенной в [15].

Пусть равновесный спектр возвышений взволнованной водной поверхности  $F_0$  при скорости ветра  $U$  удовлетворяет уравнению, следующему из (1):

$$2B[F_0, K, U]F_0 + \text{Int}[F_0, K] = 0.$$

Рассмотрим аналогично [15] пространственно-однородное малое возмущение спектра возвышений  $F_1$ :

$$F = F_0[K] + F_1[F_0, \mathbf{k}, t].$$

Такой возмущённый спектр будет релаксировать к равновесному спектру. Скорость релаксации обозначим  $\beta_r$ , тогда

$$F_1[F_0, \mathbf{k}, t] = F_1 \exp(-\beta_r t),$$

а из (1) в линейном приближении по  $F_1$  следует

$$-\beta_r F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial t} = \left( \frac{\delta}{\delta F} \text{Int}[F] \right) \Big|_{F=F_0} + 2B[F_0, K, U] + 2 \frac{\delta B_0}{\delta F} \Big|_{F=F_0} F_0 \Big) F_1,$$

где  $\delta/\delta F$  обозначает вариационную производную. Тогда вариационная производная интеграла столкновений

$$\frac{\delta}{\delta F} \text{Int}[F, K] \Big|_{F=F_0[K]} = - \left( 2B_0[F_0, K, U] + 2 \frac{\delta B_0}{\delta F} \Big|_{F=F_0[K]} F_0 + \beta_r \right). \quad (2)$$

Аналогично [15] воспользуемся аппроксимацией интеграла столкновений и в том случае, когда возмущение спектра зависит от пространственной координаты. Предположим, что возмущение коротковолнового спектра вызывается неоднородным течением на поверхности воды, тогда механизмами, поддерживающими это возмущение, являются трансформация коротких волн в поле этого неоднородного течения и модуляция ветрового инкремента. При этом модуляция амплитудно-зависимого ветрового инкремента коротких волн определяется двумя причинами: возмущениями скорости ветра, индуцированными неоднородным течением, и модуляцией амплитуды ветровых волн, т. е.

$$B[F, K, U, x, t] = B_0[F_0, K, U] + \frac{\delta B_0}{\delta U} U_1(x, t) + \frac{\delta B_0}{\delta F} F_1(x, t),$$

где  $U_1(x, t)$  — возмущение скорости ветра, вызванное неоднородным течением. Если неоднородное течение достаточно медленное, так что длинноволновые вариации скорости ветра определяются вариациями тангенциального напряжения  $T$ , невозмущённое значение которого равно  $u_*^2$ , то

$$B_1 = \frac{\delta B_0}{\delta u_*^2} T_1 + \frac{\delta B_0}{\delta F} F_1, \quad (3)$$

где  $T_1$  — длинноволновое возмущение тангенциального напряжения.

Подставляя в (1) выражение для  $B$  с учётом формулы (3) для  $B_1$ , а также выражения (2) для вариации интеграла столкновений, получим в линейном приближении уравнение для  $F_1$  в виде

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} - K \frac{\partial F_0}{\partial K} \frac{\partial U_0}{\partial x} = -\beta_r F_1 + \tilde{\eta} \frac{\partial U_0}{\partial x} F_0 + 2 \left. \frac{\delta B_0}{\delta T} \right|_{T=u_*^2} T_1 F_0.$$

Если неоднородное течение представляет собой гармоническую волну малой амплитуды, возмущение в которой

$$\eta = a \cos(\omega t - kx), \quad (4)$$

то

$$U_0 = cka \exp[i(kx - \omega t)], \quad F_1 = F_{10} \exp[i(kx - \omega t)],$$

и

$$F_1 = \frac{i\omega ka}{\beta_r - i\omega} \left( K \frac{\partial F_0}{\partial k} + \tilde{\eta} F_0 \right) + 2 \frac{\delta B_0}{\delta u_*^2} T_1 \frac{F_0}{\beta_r - i\omega}, \quad (5)$$

где  $c$  — фазовая скорость волны. Скорость релаксации в дальнейшем будет полагаться равной  $2B_0[F]$  аналогично [15].

Первое слагаемое в (5) описывает консервативную трансформацию коротких волн на неоднородном поле течений. Как показывают оценки, этот механизм является определяющим для модуляции дециметровых волн при наличии внутренних волн [1, 2] и очень важен при формировании гидродинамической МПФ длинных поверхностных волн [16]. В то же время для объяснения модуляции волн сантиметрового диапазона при наличии как внутренних, так и длинных поверхностных волн важен учёт дополнительных факторов. Второе слагаемое в (5) описывает влияние модуляции ветрового инкремента поверхностных волн, который обсуждается в настоящей работе. Для его вычисления требуется модель ветрового пограничного слоя над взволнованной водной поверхностью.

## 2. ВЕТРОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НАД ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрим ветровой пограничный слой над водной поверхностью. Для описания средних полей воспользуемся системой уравнений Рейнольдса [17], в которых используется простейшая гипотеза замыкания — градиентная аппроксимация турбулентных напряжений:

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3} \langle u_i'^2 \rangle \delta_{ij} + \nu \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

где  $\langle u_i \rangle$  —  $i$ -тая компонента средней скорости,  $\langle u_i'^2 \rangle$  — средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций,  $\nu$  — коэффициент турбулентной вязкости,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Будем считать  $\nu$  заданной функцией вертикальной координаты  $z$ . Хорошим представлением функции  $\nu(z)$  является аппроксимация, полученная в [18]:

$$\nu(z) = \nu_a [N_0 + 0,4z^+ (1 - \exp[-(z^+/L)^2])]. \quad (7)$$

Здесь  $z^+ = zu_*/\nu_a$  — вертикальная координата, выраженная в вязких длинах,  $u_*$  — скорость трения ветра,  $\nu_a$  — кинематическая вязкость воздуха. Входящие в (7) параметры  $L$  и  $N_0$  определяются режимом обтекания поверхности. Для гидродинамически гладкого режима обтекания

поверхности воды  $L = 22,4$ ,  $N_0 = 1$ . Влияние шероховатости поверхности воды, вызванное наличием волн на поверхности, может быть учтено путём решения задачи о передаче импульса от ветра к волнам, как это делается в разделе 3. Другой упрощённый способ был предложен в работе [19], при этом в случае шероховатой поверхности  $N_0 > 1$ . Этот метод используется в разделе 4. Заметим, что формула (7) описывает эффективную вязкость как в вязком подслое, так и в логарифмическом пограничном слое.

Будем рассматривать двумерные движения, тогда система уравнений Рейнольдса может быть записана для завихренности  $\chi$  и функции тока  $\psi$ :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial z} - \Delta(\nu \chi) + 2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \Delta \psi = \chi. \quad (8)$$

На поверхности воды  $z = \zeta(x, t)$  выполняются граничные условия непротекания и прилипания:

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{z=\zeta(x,t)} = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=\zeta(x,t)} = \left. \frac{\partial \psi_w}{\partial z} \right|_{z=\zeta(x,t)}, \quad (9)$$

где  $\psi_w$  — функция тока течения в воде.

Рассматриваемая здесь модель приводного погранслоя атмосферы учитывает вязкий подслой, имеющий чрезвычайно малую толщину (меньше 1 мм), которая существенно меньше типичной высоты поверхностных волн. В связи с этим для того, чтобы исключить сильную геометрическую нелинейность, необходимо перейти к криволинейным координатам, в которых одна из координатных линий совпадает с взволнованной поверхностью воды [20]. Для случая ортогональных координат  $(s, \gamma)$ , задаваемых преобразованием

$$x = x(s, \gamma, t), \quad z = z(s, \gamma, t),$$

где  $z = z(s, \gamma = 0, t)$  — уравнение поверхности воды, система (8) примет вид [21]

$$\begin{aligned} & \chi_t + \frac{\chi_s}{I} [\psi_\gamma - (x_s x_t + z_s z_t)] - \frac{\chi_\gamma}{I} [\psi_s + (x_\gamma x_t + z_\gamma z_t)] = \\ & = \frac{\Delta(\nu \chi)}{I} - \frac{2}{I^2} \nu_{\gamma\gamma} \psi_{ss} - \frac{I_\gamma}{I^3} [(\psi_\gamma \nu_\gamma)_\gamma - \nu_\gamma \psi_{ss}] - \frac{I_s}{I^3} (2\nu_\gamma \psi_{s\gamma} - \psi_s \nu_{\gamma\gamma}) + \psi_\gamma \nu_\gamma \frac{I_s^2 + I_\gamma^2}{I^4}, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\Delta \psi = \chi = \frac{\psi_{ss} + \psi_{\gamma\gamma}}{I}, \quad (10b)$$

а граничные условия (9) преобразуются к виду

$$\psi|_{\gamma=0} = 0, \quad (10b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \frac{1}{\sqrt{I_a}} = \frac{\partial \psi_w}{\partial \gamma} \frac{1}{\sqrt{I_w}}. \quad (10g)$$

Здесь и далее нижний индекс означает частную производную по соответствующей координате;  $I = \partial(x, z)/\partial(s, \gamma)$  — якобиан ортогонального преобразования координат, а индексы а и w относятся к величинам в воздухе и воде соответственно.

В рамках предлагаемой модели модулированный инкремент ветровых волн может быть найден достаточно просто, если характерные временные  $\tau$  и пространственные  $\lambda$  масштабы поверхностных волн малы по сравнению с соответствующими масштабами течения  $T_0$  и  $L_0$ , т. е. в задаче есть малый параметр  $\mu = 0(\tau/T_0, \lambda/L_0)$ . При этом процедура решения задачи состоит в следующем. Вначале в рамках модели (10a), (10b) и (11) находится переменное поле ветра, индуцированное

в воздухе течением на поверхности воды, а затем находится ветровой инкремент достаточно коротких поверхностных волн в низшем порядке по  $\mu$ , которому соответствует параметрическое приближение. Примеры расчёта модулированного инкремента коротких поверхностных волн и модуляции их спектральной плотности приведены ниже для двух случаев неоднородных течений: волн зыби и интенсивных внутренних волн.

### 3. МОДУЛЯЦИЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН ВОЛНАМИ ЗЫБИ

Как показано выше, модуляция спектра коротких волн при наличии волны зыби описывается формулой (5), в которую входит комплексная амплитуда длинноволнового возмущения инкремента коротких волн  $T_1 (\delta B_0 / \delta T)|_{T=u_2^2}$ , где  $T_1$  — комплексная амплитуда длинноволнового возмущения тангенциального турбулентного напряжения ветра. Вычислим эту величину в рамках настоящей модели. Задача распадается на две: определение длинноволнового возмущения скорости ветра, индуцированного волной зыби, и определение коротковолнового возмущения.

#### 3.1. Среднее течение и длинноволновое возмущение

В океанских условиях возвышение поверхности воды в волне зыби даже малой амплитуды существенно превышает толщину вязкого подслоя атмосферного пограничного слоя. В связи с этим перейдём вначале к системе криволинейных координат  $(s, \gamma)$ , в которых одна из координатных линий совпадает с водной поверхностью, возмущённой длинной волной. Для гармонической волны с полем возвышений (4) в системе отсчёта, движущейся с фазовой скоростью длинной волны, криволинейные координаты не зависят от времени:

$$x = s - a \exp(-k\gamma) \sin(ks), \quad y = \gamma + a \exp(-k\gamma) \cos(ks).$$

Тогда система уравнений гидродинамики в переменных завихренность—функция тока совпадает с (10а), (10б) при  $x_t = y_t = 0$ .

Решение уравнений (10а), (10б) может быть представлено в виде суммы усреднённых по волновым возмущениям функции тока и завихренности  $\psi_0$  и  $\chi_0$ , их длинноволновых возмущений  $\psi^{(l)}$  и  $\chi^{(l)}$ , индуцированных волной зыби с возвышением (4), и коротковолновых возмущений  $\psi^{(s)}$  и  $\chi^{(s)}$ , вызванных ветровыми волнами. Таким образом, в системе отсчёта, бегущей с фазовой скоростью волны,

$$\psi = \psi_0(\gamma) + \psi^{(l)}(\gamma, s) + \psi^{(s)}(\gamma, s, t), \quad \chi = \chi_0(\gamma) + \chi^{(l)}(\gamma, s) + \chi^{(s)}(\gamma, s, t).$$

Хорошо известно, что волновые возмущения убывают при удалении от поверхности на расстояние порядка их длины волны. Будем рассматривать такие расстояния, при которых коротковолновые возмущения малы по сравнению с длинноволновыми.

Усредняя систему (10а), (10б) по коротковолновым возмущениям и линеаризуя полученные уравнения относительно длинноволновых возмущений, получим для среднего течения

$$\frac{d^2}{d\gamma^2}(\nu\chi_0) + \frac{d^2}{d\gamma^2}\Sigma_0(\gamma) = 0, \quad (11a)$$

$$\psi_{0\gamma\gamma} = \chi_0, \quad (11b)$$

а для длинноволнового возмущения —

$$\frac{\partial \chi^{(l)}}{\partial s} \frac{\partial \psi_0}{\partial \gamma} - \frac{\partial \chi_0}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi^{(l)}}{\partial s} - \left[ \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right] \nu \chi^{(l)} = \frac{\partial^2 [\Sigma_1(\gamma, s) - 2y_{1\gamma} \Sigma_0(\gamma)]}{\partial \gamma^2} - 2\nu_{\gamma\gamma} \psi_{ss}^{(l)} - I_\gamma (\nu_\gamma \psi_{0\gamma}), \quad (12a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial s^2} = \chi^{(1)} + 2y_1 \gamma \chi_0. \quad (126)$$

Здесь  $\Sigma_0(\gamma)$  и  $\Sigma_1(\gamma, s)$  — среднее значение и длинноволновое возмущение потока импульса ветровых волн:

$$\Sigma_0(\gamma) + \Sigma_1(\gamma, s) \approx -\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \overline{\psi_\gamma^{(s)} \psi_s^{(s)}}, \quad (13)$$

где черта сверху означает усреднение по коротковолновым возмущениям. Поскольку  $\psi^{(s)}$  убывает при удалении от поверхности раздела вода—воздух, то из (13) очевидно следует, что волновой поток импульса  $\Sigma$  также убывает. При этом, как показано в [22] для ветровых волн, которые по определению имеют фазовые скорости меньше  $20u_*$ , перепад волнового потока импульса сосредоточен вблизи поверхности в области перехода от вязкого подслоя к логарифмическому пограничному слою, т. е. масштаб  $\delta$  изменения величин  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_1$  составляет  $20 \div 30$  вязких длин  $\nu_a/u_*$ .

При удалении от поверхности среднее поле завихренности удовлетворяет граничному условию

$$\nu \chi_0 \Big|_{\gamma \rightarrow \infty} = u_*^2, \quad (14)$$

а длинноволновые возмущения убывают:

$$\{\psi^{(1)}, \chi^{(1)}\} \Big|_{\gamma \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (15)$$

Если масштаб волнового пограничного слоя длиной волны мал по сравнению с её длиной и фазовая скорость велика по сравнению со скоростью потока внутри пограничного слоя, то (12а), (12б) сводятся к одному уравнению для длинноволнового возмущения турбулентного напряжения, которое с использованием градиентной аппроксимации турбулентных напряжений может быть представлено в виде

$$T^{(1)} = \nu \chi^{(1)}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \gamma^2} + ikc \chi^{(1)} = -\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} [\Sigma_1(\gamma) - 2y_1 \gamma \Sigma_0(\gamma)], \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial \gamma^2} = \chi^{(1)}.$$

Характерный вертикальный масштаб длинноволнового возмущения турбулентного напряжения  $T^{(1)}$  равен  $L_T \approx \kappa u_*/(ck) \ll 1/k$ , поскольку  $u_*/c \ll 1$ , где  $\kappa = 0,4$  — постоянная Кармана.

Уравнение (17) может быть решено методом сращиваемых асимптотических разложений, если масштаб  $L_T$  много больше, чем масштаб  $\delta = (20 \div 30) \nu_a/u_*$  источников в правой части (12а), (12б). Это условие можно переписать в виде  $ck \ll u_*^2/(30\nu_a)$ . Пороговая скорость трения ветра, при которой наблюдается генерация волн, равна  $u_* \approx 5$  см/с [21], вязкость воздуха  $\nu_a = 0,15$  см<sup>2</sup>/с, тогда частота волн зыби должна быть много меньше  $6$  с<sup>-1</sup>, что практически всегда выполняется.

При выполнении условий  $\delta \ll \gamma \ll k^{-1}$  слагаемые в правой части (12а), (12б) пренебрежимо малы, а коэффициент вихревой вязкости в этой области  $\nu = \kappa u_* \gamma$ . Тогда из (17) можно получить уравнение для длинноволнового возмущения скорости ветра  $U^{(1)}$ , которое связано с  $T^{(1)}$  соотношением  $T^{(1)} = \kappa u_* \gamma \partial U^{(1)} / \partial \gamma$ :

$$\frac{d}{d\gamma} \gamma \frac{dU^{(1)}}{d\gamma} + \frac{ikc}{\kappa u_*} U^{(1)} = 0, \quad (18)$$

$$U^{(1)} \Big|_{\gamma \rightarrow \infty} = 0. \quad (19)$$

Решение уравнения (18), убывающее с расстоянием от поверхности, можно выразить с использованием модифицированных функций Бесселя:

$$U^{(1)} = BK_0 \left( 2 \exp(i\pi/4) \sqrt{\gamma^+ ck\nu_a/u_*^2} \right), \quad (20)$$

где  $\gamma^+ = \gamma u_* / \nu_a$ .

Модифицированная функция Бесселя при  $\gamma^+ ck\nu_a/u_*^2 \ll 1$  имеет логарифмическую асимптотику:

$$U^{(1)} = \frac{T_1}{\kappa u_*} \left[ \ln \left( \frac{3,15 k c \nu_a}{u_*^2} \gamma^+ \right) + \frac{\pi i}{2} \right]. \quad (21)$$

Из (21) следует, что длинноволновые возмущения тангенциального напряжения при этом стремятся к постоянному значению  $T^{(1)} = T_1$ . Неизвестная константа  $T_1$  может быть найдена из условий сращивания полученного «внешнего» решения, справедливого на большом расстоянии от поверхности, с «внутренним» решением, справедливым вблизи поверхности.

### 3.2. Коротковолновое возмущение

Для простоты здесь будут рассмотрены только волны с волновыми векторами, направленными вдоль скорости ветра. В действительности ветровые волны могут иметь произвольные направления волновых векторов, поэтому представленная здесь модель может рассматриваться только как оценочная, имеющая целью продемонстрировать влияние нелинейных эффектов при взаимодействии волн с ветром на трансформацию спектра коротких волн.

#### 3.2.1. Коротковолновое возмущение в «длинноволновых» координатах $(s_1, \gamma)$

Уравнения для коротких волн на фоне поля длинных волн в нулевом порядке по малому параметру задачи  $\mu$  можно представить в виде [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(XI)}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial s_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} - \frac{\partial X}{\partial \gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} &= I \Delta(\nu X) - 2I\nu_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_1^2}, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \right) \Phi &= IX. \end{aligned} \quad (22)$$

Система (22) записана в координатах  $(s_1, \gamma)$ , где  $s_1 = s + ct$ ,

$$\begin{aligned} \Phi = \psi + cI\gamma &= \int_0^\gamma U_0(\gamma_1) d\gamma_1 + \text{Re} \left[ (\psi^{(1)}(\gamma) - 2kac\gamma) \exp[ik(s_1 - ct)] \right] + \psi^{(s)}(s_1, \gamma, t) = \\ &= \Phi_0(\gamma, \Sigma) + \psi^{(s)}(s_1, \gamma, t). \end{aligned} \quad (23)$$

Функции  $\Phi$  и  $X$  представляют собой приближённые выражения для функции тока и завихренности в координатах  $(s_1, \gamma)$ ,  $\Sigma = ik(s_1 - ct)$  — «медленная» по отношению к коротковолновым возмущениям координата вдоль поверхности, возмущённой длиной волной.

Представим случайное поле возвышений поверхности в виде интеграла Фурье—Стилтьеса

$$\xi(s_1, \gamma, t) = \int dA(K) \exp[i(Ks - \Omega(K)t)].$$



Предположим для простоты, что поле коротких волн имеет случайные фазы, тогда имеет место равенство

$$dA(K) dA(K_1) = F_0(K) \delta(K - K_1) dK dK_1, \quad (24)$$

где  $F_0(K)$  — равновесный спектр возвышений поверхности воды.

Если ширина спектра волн достаточно велика, то задачу можно решать в квазилинейном приближении, аналогичном используемому в теории взаимодействия волн и частиц в плазме [23]. В рамках квазилинейного приближения уравнения для отдельных гармоник линейны, и нелинейность влияет только на средние поля скорости, завихренности и т. д.

### 3.2.2. Коротковолновое возмущение в «коротковолновых» координатах $(\xi, \eta)$ , «приспособленных» к случайному полю коротких волн

В квазилинейном приближении волновое поле следует искать в виде суммы независимых гармоник. Смещение поверхности воды, вызванное полем ветровых волн, может быть велико по сравнению с толщиной вязкого подслоя в воздухе. Чтобы избежать этой геометрической нелинейности, перейдём к криволинейным координатам, в которых координатная линия совпадает с водной поверхностью в первом порядке по амплитуде возвышения поверхности (аналогично [24]). Будем использовать следующее преобразование координат:

$$s_1 = \xi + \int_{-\infty}^{+\infty} i \exp[iK(\xi - \Omega(K)t/K) - K\eta + i\varphi_K] dA, \\ \gamma = \eta + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iK(\xi - \Omega(K)t/K) - K\eta + i\varphi_K] dA, \quad (25)$$

где  $\Omega(K)/K$  — фазовая скорость  $K$ -й гармоники,  $\varphi_K$  — её фаза, которая предполагается случайной.

Аналогично [24] будем представлять выражение для функции тока в виде

$$\Phi = \Phi_0(\eta, \Sigma) + \varphi^{(s)}(\xi, \eta, t). \quad (26)$$

В (23) и (26) входит одна и та же функция  $\Phi_0$ , описывающая среднее течение и его длинноволновое возмущение. Однако в (26) это функция  $\eta$ , а не  $\gamma$ . При этом коротковолновое возмущение функции тока  $\varphi^{(s)}(\xi, \gamma, t)$ , входящее в (26), отличается от слагаемого  $\psi^{(s)}(s_1, \gamma, t)$ , входящего в (23), поскольку оно описывает отклонение линий тока от координатных линий (25).

Функция тока  $\Phi$  и завихренность  $X$  удовлетворяют системе уравнений, которая может быть получена из системы (22) путём преобразования координат (25):

$$J^3 I \left[ \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{s_{1t} s_{1\xi} + \gamma_{1t} \gamma_{1\xi}}{J} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{s_{1t} s_{1\eta} + \gamma_{1t} \gamma_{1\eta}}{J} \right] + \\ + J^2 \left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) (\nu X) \right) = \\ = -2\nu_{\eta\eta} \Phi_{\xi\xi} J - J_{\eta} [(\nu_{\eta} \Phi_{\eta})_{\eta} + \nu_{\eta} \Phi_{\xi\xi}] - J_{\xi} (2\nu_{\eta} \Phi_{\xi\eta} - \Phi_{\xi} \nu_{\eta\eta}) + \nu_{\eta} \Phi_{\eta} \frac{J_{\xi}^2 + J_{\eta}^2}{J}, \quad (27a)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi = I J X, \quad (27b)$$

где  $J = (s_{1\xi})^2 + (s_{1\eta})^2$ . Граничные условия для системы (27) имеют вид [9]

$$\Phi|_{\eta=0} = 0 \quad (27\text{в})$$

— условие непротекания на поверхности воды,

$$\Phi_{\eta}|_{\eta=0} = (1 + 2y_{1\gamma}) \int 2\Omega \, dA \quad (27\text{г})$$

— условие прилипания на поверхности воды,

$$\nu X|_{\eta \rightarrow \infty} = u_*^2 + \text{Re}[T_1 \exp(i\Sigma)] \quad (27\text{д})$$

— условие сращивания поля завихренности с внешним решением и убывания коротковолновых возмущений.

В квазилинейном приближении волновые возмущения

$$\begin{Bmatrix} \varphi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iK(\xi - \Omega(K)t/K)] \begin{Bmatrix} \Phi_2(\eta) \\ X_2(\eta) \end{Bmatrix} dA(K)$$

удовлетворяют системе линейных уравнений, следующих из (27а), (27б):

$$\begin{aligned} (1 + 2y_{1\gamma}) [(\Phi_{0\eta} - \Omega/K) X_2 - \Phi_2 X_{0\eta}] iK = \\ = (1 + 2y_{1\gamma}) (d^2/d\eta^2 - K^2) (\nu X_2) + 2K^2 \Phi_2 \nu_{\eta\eta} - 2K \exp(-K\eta) [\nu_{\eta} (\Phi_{0\eta} - \Omega/K)]_{\eta}, \\ \Phi_{2\eta\eta} - K^2 \Phi_2 = [X_2 - 2K \exp(-K\eta) X_0] (1 + 2y_{1\gamma}), \end{aligned} \quad (28)$$

с граничными условиями на поверхности, следующими из (27в), (27г):

$$\Phi_2|_{\eta=0} = 0, \quad \Phi_{2\eta}|_{\eta=0} = (1 + 2y_{1\gamma}) 2\Omega(K),$$

и условием убывания возмущений на бесконечности.

Средние величины  $\Phi_{0\eta}$  и  $X_0$ , в свою очередь, удовлетворяют системе, которую можно получить усреднением (27а), (27б) по координате  $\xi$ :

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (\nu X_0) = \frac{d^2}{d\eta^2} [\tau_{\text{wave}}(\eta)], \quad (29\text{а})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_0}{d\eta^2} = \left[ X_0 \left( 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(K) K^2 \exp(-2K\eta) \, dK \right) + \right. \\ \left. + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}(X_2 F_0(K) K^2 \exp(-K\eta)) \, dK \right] (1 + 2y_{1\gamma}), \end{aligned} \quad (29\text{б})$$

где  $F_0(K)$  — спектр возвышений поверхности воды в (24), а

$$\begin{aligned} \tau_{\text{wave}} = \int_0^{\eta} K \, d\tilde{\eta} \left[ -\frac{1}{2} \text{Im}[\Phi_2^* X_2 F_0(K)] \, dK + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp(-K\tilde{\eta}) \nu_{\tilde{\eta}} \text{Re}(\Phi_{2\tilde{\eta}} - K\Phi_2) + 2 \exp(-2K\tilde{\eta}) \nu_{\tilde{\eta}} \Phi_{0\tilde{\eta}}] F_0(K) K^2 \, dK \right] \end{aligned}$$

имеет смысл усреднённого по горизонтальной координате  $\xi$  потока импульса от волн к ветру.

Граничные условия для системы (29а), (29б) являются следствием (27г), (27д):

$$\Phi_{0\eta}|_{\eta=0} = 0, \quad (29в)$$

$$\nu X_{0\eta}|_{\eta \rightarrow \infty} = u_*^2 + \text{Re}[T_1 \exp(i\Sigma)]. \quad (29г)$$

Интегрируя систему (29а), (29б) с граничными условиями (29г), (29д), получаем

$$\frac{d\Phi_0}{d\eta} = \int_0^\eta \frac{u_*^2 + T_1}{\nu} d\eta_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(K, \eta) dK, \quad (30)$$

где

$$\Delta U(K, \eta) = \left[ \int_0^\eta \frac{\tau_{\text{wave}}(\eta_1)}{\nu} d\eta_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(K) K^2 (\exp(-2K\eta) X_0 - \exp(-K\eta) \text{Re} X_2) dK \right] (1 + 2y_{1\gamma})$$

— добавка к профилю средней скорости и её длинноволнового возмущения, обусловленная передачей импульса от ветровой волны с волновым числом  $K$  к ветровому потоку.

Принимая во внимание определение функции  $\Phi$  (23), легко получить связь между  $U^{(1)} = d\varphi^{(1)}/d\eta$  (см. формулу (21)) и  $d\Phi_0/d\eta$ :

$$\frac{d\Phi_0}{d\eta} = U^{(1)} - 2 \text{Re}[kac \exp(i\Sigma)] + U_0(\eta).$$

Известно, что при удалении от поверхности коэффициент вихревой вязкости  $\nu$  имеет линейную асимптотику:  $\nu = 0,4u_*\eta$  [17] (в частности, это очевидно следует из формулы (7)), а при  $\eta \rightarrow 0$  имеем  $\nu \rightarrow \nu_a = \text{const}$ . С учётом этого легко видеть, что первое слагаемое в (30) имеет логарифмическую асимптотику, при этом второе слагаемое стремится к некоторой постоянной:

$$U_0(\eta) + U^{(1)} = \frac{u_*}{\kappa} \left[ 1 + \text{Re} \left( \frac{T_1}{u_*^2} \exp(i\Sigma) \right) \right] \ln \frac{\eta}{\eta_0} + 2ck \text{Re}[a \exp(i\Sigma)] + \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(K, \eta)|_{\eta \rightarrow \infty} dK,$$

где  $\eta_0$  — параметр шероховатости. Для гидродинамически гладкого обтекания  $\eta_0 = 0,118\nu_a/u_*$ . Если коэффициент модуляции турбулентного напряжения велик:  $m_T = |T_1/(u_*^2 ka)| \gg 1$ , то трансформация коротких волн определяется главным образом модуляцией этой величины, и можно пренебречь слагаемыми порядка  $y_{1\gamma}$  в системе (28), (29). Тогда, если ввести обозначение  $\varepsilon = \text{Re}[T_1 \exp(i\Sigma)]/u_*^2$ , то

$$\nu X_0|_{\eta \rightarrow \infty} = u_*^2 (1 + \varepsilon)|_{\varepsilon = \text{Re}[kam_T \exp(i\Sigma)]},$$

и выражения для  $U_0$  и  $U^{(1)}$  можно записать следующим образом:

$$U_0(\eta) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{\eta}{\eta_0} + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(K, \eta)|_{\eta \rightarrow \infty} dK \right) \Big|_{\varepsilon=0},$$

$$U^{(1)} = \left[ \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{\eta}{\eta_0} + \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(K, \eta)|_{\eta \rightarrow \infty} dK \right) \Big|_{\varepsilon=0} \right] \text{Re}[kam_T \exp(i\Sigma)]. \quad (31)$$

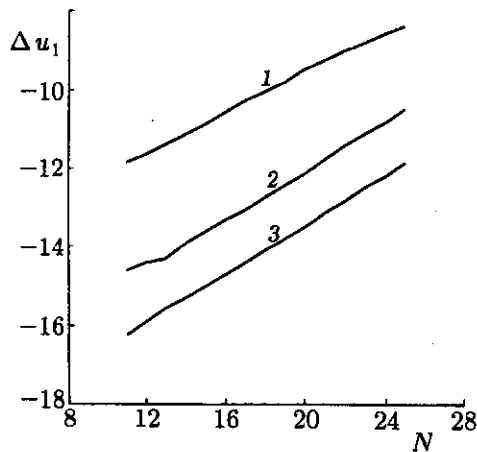


Рис. 1. Зависимость параметра  $\Delta u_1$  от «возраста» ветрового волнения при скорости трения ветра  $u_* = 10, 20$  и  $30$  см/с (кривые 1-3 соответственно)

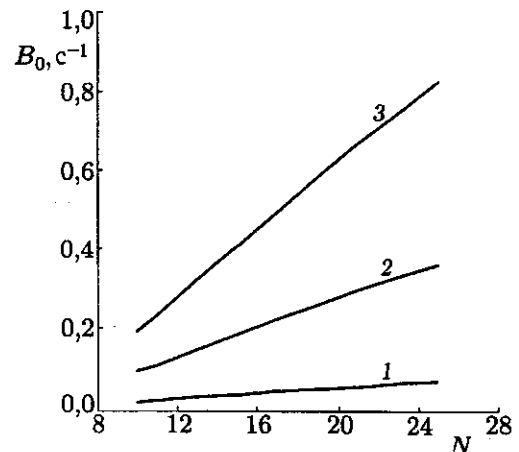


Рис. 2. Зависимость инкремента ветровых волн с длиной 2,3 см от «возраста» ветрового волнения при скорости трения ветра  $u_* = 10, 20$  и  $30$  см/с (кривые 1-3 соответственно)

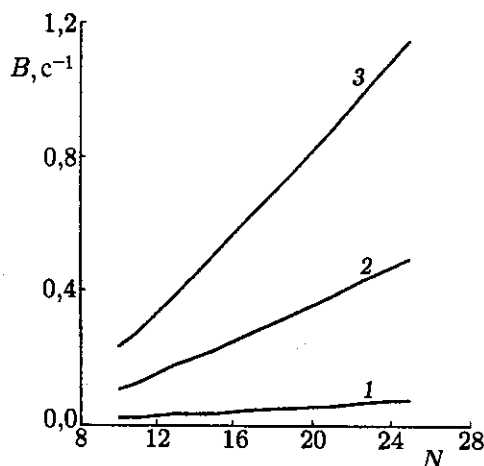


Рис. 3. Зависимость параметра  $B = (\partial B_0 / \partial u_*) u_*$  для волны с длиной 2,3 см от «возраста» ветрового волнения при скорости трения ветра  $u_* = 10, 20$  и  $30$  см/с (кривые 1-3 соответственно)

Сравнивая (31) и (21), легко получить

$$T_1 = \frac{2\kappa u_* k a}{\ln\left(\frac{3,15\kappa c u_a}{\kappa u_*^2} \eta_0^+\right) - \kappa \Delta u_1 + \pi/2}, \quad (32)$$

где

$$\Delta u_1 = \frac{1}{u_*} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta U(K, \eta) \Big|_{\eta \rightarrow \infty} dK, \quad \eta_a^+ = \eta_0 u_* / u_a.$$

Первое слагаемое в знаменателе (32) отрицательно, вследствие чего в линейном приближении (при  $\Delta u_1 < 0$ ) по амплитуде ветровых волн фаза коэффициента модуляции турбулентного напряжения близка к  $-\pi$ . Второе слагаемое положительно, поскольку добавка к среднему профилю скорости, возникающая за счёт нелинейного взаимодействия с полем ветровых волн, отрицательна:  $\Delta u_1 < 0$  (см. [21]). Это означает, что фаза  $T_1$

может измениться, если добавка  $\Delta u_1 < 0$  достаточно велика по модулю.

Чтобы найти  $\Delta u_1$ , численно решалась самосогласованная квазилинейная система уравнений, в которую входят уравнения для гармоник и уравнения для среднего течения. Уравнения для каждой гармоники решались численно сеточным методом, основанным на методе исключения Гаусса, модифицированном для ленточной матрицы.

При вычислении модулированного спектра коротких волн в рамках релаксационной модели по формуле (5) требуется знать величины  $\beta_r$  и  $B = (\delta B_0 / \delta u_*) u_*$ , входящие в (5), и  $\Delta u_1$ , которые в рамках квазилинейной модели определяются скоростью ветра и спектром ветровых волн. При расчётах использовался спектр «JONSWAP» [25]:

$$F_0(K) = \frac{1}{2} \alpha_p K^{-3} \exp\left[-\frac{5}{4} \left(\frac{K_p}{K}\right)^2\right] \gamma^r, \quad r = \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{K} - \sqrt{K_p}\right)^2 / \left(\sigma \sqrt{K_p}\right)^2\right], \quad (33)$$

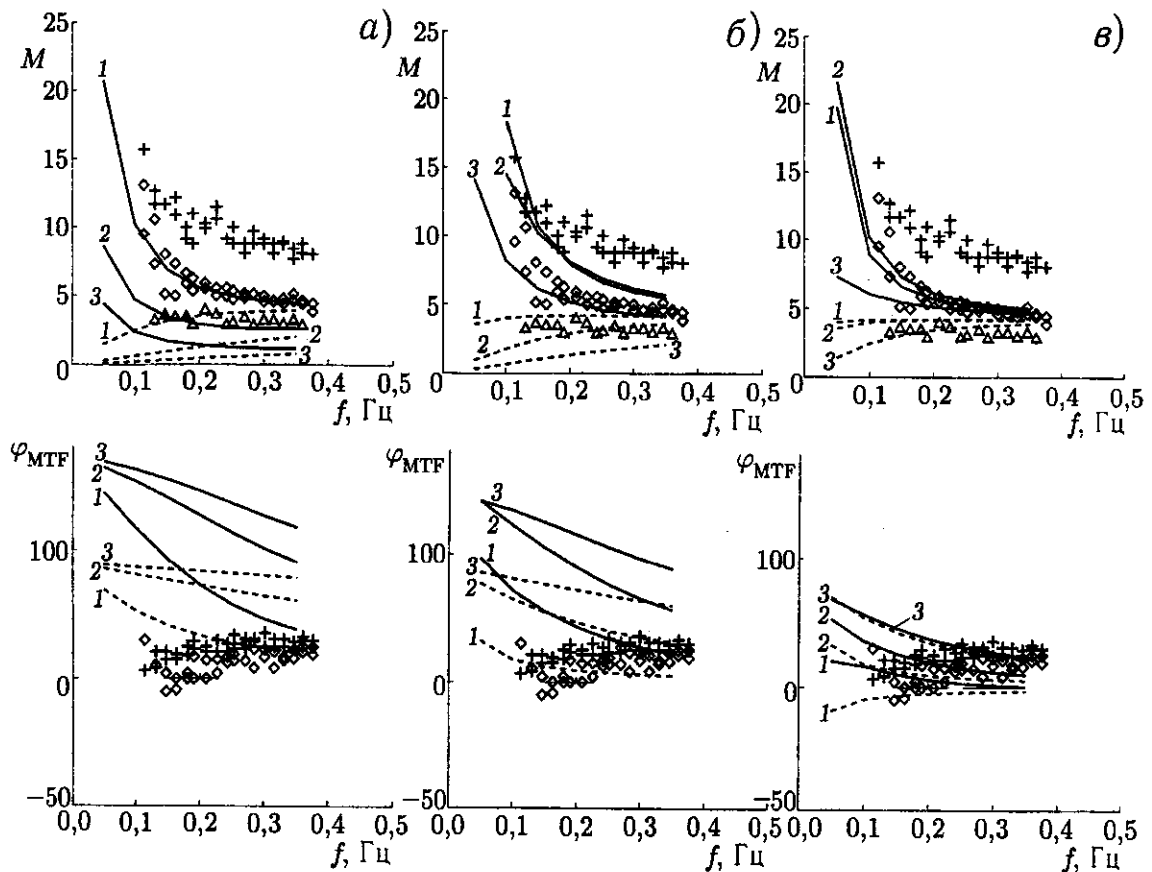


Рис. 4. Зависимости величины  $M$  и фазы  $\varphi_{\text{MTF}}$  гидродинамической МПФ от частоты длинной волны, рассчитанные в рамках линейной (а) и квазилинейной (б, е) теории. Длина короткой волны 2,3 см. Сплошные линии соответствуют расчётам с учётом модуляции инкремента, пунктирные линии — расчётам без учёта модуляции инкремента. Кривые 1 соответствуют скорости трения ветра 16 см/с, кривые 2 — 30 см/с, кривые 3 — 50 см/с. Экспериментальные точки взяты из [26]. Параметр разгона  $N = 25$  (б),  $N = 10$  (е)

где  $\alpha_p = 0,57 (C_p/u_*)^{-3/2}$ ,  $\gamma = 3,3$ ,  $\sigma = 0,1$ ,  $K_p = g/C_p^2$ ,  $C_p = Nu_*$  — фазовая скорость энергонесущей компоненты,  $N$  — так называемый параметр «возраста» волнения,  $g$  — ускорение свободного падения; известно, что  $N$  растёт с увеличением разгона. Хорошо известно [25], что с ростом  $N$  средний уклон в спектре ветрового волнения падает, таким образом, волны становятся «более линейными». Зависимости параметров задачи  $\Delta u_1$ ,  $B_0 = \beta_T/2$  и  $B = (\delta B_0/\delta u_*) u_*$  от параметра  $N$  при нескольких значениях скорости трения ветра представлены на рис. 1–3. Из рис. 1 видно, что при малых  $N$  («молодое» волнение) получаются большие по абсолютной величине значения отрицательной добавки к среднему профилю скорости, вызванной нелинейным взаимодействием между ветровыми волнами и ветровым течением. Это, очевидно, обусловлено большими средними амплитудами поля ветровых волн при меньших  $N$ . Уменьшение ветрового инкремента короткой поверхностной волны  $B_0$  при уменьшении  $N$  (см. рис. 2) обусловлено уменьшением средней скорости ветра, описываемой величиной  $\Delta u_1$ .

Результаты расчёта гидродинамической МПФ представлены на рис. 4 для условий, соответствующих измерениям [26]. Длина брэгговской волны составляла 2,3 см, что соответствует  $X$ -полосе радиоизлучения. Теоретические кривые отличаются параметром «возраста» ветрового волнения в спектре «JONSWAP», характеризующего степень нелинейности поля ветровых волн.

На рис. 4а представлены результаты расчёта гидродинамической МПФ для ветровых волн бесконечно малой амплитуды. Сравнение рис. 4б, в и рис. 4а показывает, что как линейная, так и квазилинейная теории дают значения модуля МПФ, удовлетворительно соответствующие экспериментальным данным, приведённым в [26]. Однако значения фазы, рассчитанные в рамках линейного приближения, противоречат экспериментальным данным (см. рис. 4а). При этом квазилинейное приближение даёт значения фазы гидродинамической МПФ, которые значительно лучше согласуются с экспериментальными данными (рис. 4б, в).

На тех же рисунках приведены значения гидродинамической МПФ, рассчитанные без учёта эффекта модуляции инкремента брэгговской волны (пунктирные линии). Видно, что такие расчёты очень плохо согласуются с измеренными значениями амплитуды и фазы МПФ.

#### 4. МОДУЛЯЦИЯ КОРОТКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ ИНТЕНСИВНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

В настоящем разделе представлена модель модуляции волн сантиметрового диапазона в поле интенсивных внутренних волн. Параметры внутренних волн были взяты из эксперимента «COPE» [11], в ходе которого наблюдались сверхинтенсивные внутренние волны, соответствующие большим контрастам рассеянного сигнала радиолокатора. Последнее было обусловлено, по-видимому, большим гидродинамическим контрастом в поле резонансных поверхностных волн сантиметрового диапазона. Более подробно результаты этого раздела представлены в [10].

Для описания поля течений, создаваемых внутренними волнами на поверхности, была использована модель Гарднера, предложенная в [27, 28].

##### 4.1. Модель интенсивных внутренних волн

В ходе эксперимента «COPE» изучались течения, создаваемые мощными внутренними приливами [11]. Наблюдаемая картина представляла собой распад приливной волны в шельфовой зоне на последовательность импульсов, распространяющихся в направлении берега и взаимодействующих между собой. По многим признакам наблюдаемый процесс являлся сильно нелинейным: амплитуды импульсов в несколько раз превышали толщину верхнего слоя жидкости, а их скорости значительно (в несколько раз) превышали скорость линейных длинных внутренних волн. Как показывает проведённое недавно сравнение [27, 28], эволюцию больших групп указанных импульсов можно в целом адекватно моделировать ансамблями взаимодействующих солитонов в рамках комбинированного уравнения Кортевега–де Вриза с квадратичной и кубичной нелинейностью (модели Гарднера):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha_1 \eta^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (34)$$

При использовании простейшей двухслойной модели стратификации коэффициенты уравнения (34) принимают следующие значения:  $c^2 = gh_1 \Delta\rho/\rho$ ,  $\alpha = 3c/(2h_1)$ ,  $\beta = ch_1 h_2/6$ ,  $\alpha_1 = -3c/(8h_1^2)$  (средние значения величин  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $\Delta\rho/\rho$  в областях проведения эксперимента составляли  $h_1 = 7$  м,  $h_2 = 143$  м,  $\Delta\rho/\rho = 3 \cdot 10^{-3}$ ). Уравнение (34), обычно используемое для описания эволюции слабонелинейных длинных внутренних волн, получается из полной системы уравнений гидродинамики в предположении относительно малого отклонения границы раздела жидкостей  $\eta(x, t)$  по сравнению с толщинами отдельных слоёв ( $h_1$  и  $h_2$ ), а также при условии, что характерные масштабы внутренних волн значительно превышают общую глубину жидкости. Кроме того, обычно квадратичный и кубичный члены в уравнении (34) удерживаются одновременно при аномально малых

значениях квадратичного слагаемого, т. е. при  $h_2 \approx h_1$ . В связи с этим важно подчеркнуть, что именно учёт обоих нелинейных членов и при условии  $h_2 \gg h_1$  (т. е. при условии, неравномерном с точки зрения приближения слабой нелинейности) позволяет получить весьма хорошее соответствие между амплитудами и скоростями наиболее интенсивных наблюдавшихся импульсов и солитонами уравнения (34). Более того, как показано в [27], и динамика взаимодействия солитонов оказывается близкой к процессам столкновения импульсов, наблюдавшимся в эксперименте.

Описание поведения ансамблей из  $N$  взаимодействующих уединённых волн содержится в так называемых  $N$ -солитонных решениях вполне интегрируемых эволюционных уравнений, к которым относится и уравнение (34). Однако извлечение детальной информации о процессе взаимодействия, включающей возможность определения параметров солитонов (координат, скоростей, амплитуд) в произвольный момент времени непосредственно из известных формул для  $N$ -солитонных решений затруднено ввиду их громоздкости и сложности. Существенно более простое и наглядное описание взаимодействия солитонов может быть получено с помощью приближённого подхода, известного своей аналогией с описанием столкновения классических (точечных) частиц [28, 29]. Как показано в [28] именно на примере уравнения (34), уже в первом порядке приближённый подход может быть усовершенствован настолько, что даёт правильную общую структуру точного  $N$ -солитонного решения в виде строгой суперпозиции квазисолитонов с относительно медленно меняющимися параметрами. При этом решения для параметров квазисолитонов оказываются определяющими и последующими приближениями лишь уточняются, оставаясь качественно справедливыми при любых условиях задачи.

Односолитонное решение уравнения (34) имеет вид

$$\eta_s = \frac{\alpha}{2\alpha_1} \sqrt{\frac{V}{V_{\text{кр}}}} \left[ \text{th} \frac{x - (c+V)t + \Delta}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} - \text{th} \frac{x - (c+V)t - \Delta}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} \right], \quad (35)$$

где  $V_{\text{кр}} = \alpha^2/(6\alpha_1)$ ,  $\Delta \sqrt{V/\beta} = \text{Arch}(1/\sqrt{1 - V/V_{\text{кр}}})$ . Амплитуда солитона (35)

$$(\eta_s)_{\text{max}} = \frac{\alpha}{\alpha_1} \sqrt{\frac{V}{V_{\text{кр}}}} \text{th} \left( \Delta / \sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2} \right)$$

меняется от нуля (при этом его скорость равна  $c$ ) до максимального значения, равного  $\alpha/\alpha_1$ , когда его скорость достигает величины  $c + V_{\text{кр}}$ . Отметим, что именно солитонам, близким к предельным, и отвечают наиболее интенсивные наблюдавшиеся в эксперименте «СОРЕ» импульсы внутренних волн.

Принципиальной для задачи о взаимодействии импульсов является возможность представления солитона (2) как составной структуры, сформированной из более элементарных образований — кинков. Такие решения существуют в рамках (34) при  $V = V_{\text{кр}}$  и имеют вид

$$\eta_{\text{К}}^+ = \frac{\alpha}{2\alpha_1} \left( 1 + \text{th} \left[ \frac{x - (c + V_{\text{кр}})t}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} \right] \right), \quad \eta_{\text{К}}^- = \frac{\alpha}{2\alpha_1} \left( 1 - \text{th} \left[ \frac{x - (c + V_{\text{кр}})t}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} \right] \right). \quad (36)$$

Сравнение выражений (36) и (35) при  $V \approx V_{\text{кр}}$ , когда солитон имеет вид плато большой протяжённости ( $\Delta \gg 1$ ), ограниченного резкими перепадами поля, позволяет записать решение (35) следующим образом:

$$\eta_s = \eta_{\text{К}}^+ + \eta_{\text{К}}^- - \frac{\alpha}{2\alpha_1} \approx \frac{\alpha}{2\alpha_1} \left[ \text{th} \frac{x - (c + V_{\text{кр}})t + \Delta}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} - \text{th} \frac{x - (c + V_{\text{кр}})t - \Delta}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} \right]. \quad (37)$$

Представление (37) соответствует составному решению, получаемому методом сращиваемых асимптотических разложений [28]: общее решение состоит из суммы решений, соответствующих областям с быстрым изменением поля, за вычетом их общей асимптотики, являющейся решением во внешней области (в данном случае это константа  $\alpha/(2\alpha_1)$ ). Следующее из процедуры сращивания представление (37) не определяет всех параметров солитона (в частности, величину  $\Delta$ ), но правильно передаёт общую структуру поля (суперпозиция кинков). Это позволяет искать решение более общей задачи о взаимодействии  $N$  солитонов в нулевом приближении как суперпозицию  $2N$  кинков (36) чередующейся полярности:

$$\eta_N^0(x, t) = \frac{\alpha}{2\alpha_1} \sum_{i=1}^{2N} (-1)^{i+1} \operatorname{th} \frac{x - (c + V_{\text{кр}})t - S_i(t)}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}}, \quad (38)$$

здесь  $S_i(t)$  — медленно меняющаяся компонента координаты  $i$ -го кинка, такая, что  $dS_i/dt \ll V_{\text{кр}}$  (малыми параметрами  $\varepsilon_i$  задачи являются отношения  $(V_{\text{кр}} - V_i)/V_{\text{кр}}$ , где  $V_i$  — скорости невозмущённых стационарных солитонов; определённые таким образом величины  $\varepsilon_i$ , очевидно, меньше единицы для всех допустимых значений  $V_i$ ).

Алгоритм построения решений в следующих приближениях состоит в нахождении локальных поправок, отыскиваемых независимо вблизи каждого из кинков, и их последующем сращивании. Кроме того, в каждом  $n$ -м приближении процедура сращивания локальных поправок  $\eta_i^{(n)}$ , определяемых вблизи данного  $i$ -го кинка, должна учитывать экспоненциально убывающие от центров соседних кинков асимптотики соответствующего порядка.

Следуя этому алгоритму, получаем, что общее  $N$ -солитонное решение с учётом поправок первого приближения приобретает вид

$$\eta_N^{(0)} + \eta_N^{(1)} = \frac{\alpha}{2\alpha_1} \sum_{i=1}^{2N} (-1)^{i+1} \left(1 - \frac{dS_i}{dt}\right) \operatorname{th} \frac{x - (c + V_{\text{кр}})t - S_i(t)}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}},$$

где координаты кинков  $S_i$  находятся из решения системы уравнений

$$\frac{dS_i}{dt} = -8 \operatorname{ch}(S_{i+1} - S_i).$$

Удовлетворительное соответствие теоретических расчётов экспериментальным данным позволяет использовать теоретическую модель для определения поля скорости на поверхности жидкости.

Приведём приближённую расчётную формулу для группы из 9-ти импульсов — солитонов внутренних волн, соответствующих наблюдениям «СОРЕ», для указанных выше параметров в фиксированный момент времени  $t_0$ :

$$\begin{aligned} \eta_9^0(x, t_0) = 14,03 \{ & \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x + 38,5)] - \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 38,5)] + \\ & + \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 395,6)] - \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 432,9)] + \\ & + \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 946,7)] - \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 1023,8)] + \\ & + \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 1286,1)] - \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 1339,5)] + \\ & + \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 1871,28)] - \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 1914,5)] + \\ & + \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 2442,4)] - \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 2499,6)] + \\ & + \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 2977)] - \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 3070,8)] + \\ & + \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 3669,9)] - \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 3763,1)] + \\ & + \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 4246,9)] - \operatorname{th}[(25,7)^{-1}(x - 4288,3)] \}, \quad (39) \end{aligned}$$



где смещение поверхности и координаты выражены в метрах. В дальнейшем мы будем использовать эту формулу для расчётов поля скорости на поверхности двухслойной жидкости.

Зависимость смещения изоопикны во внутренней волне от горизонтальной координаты  $\xi = x/L_x$ , где  $L_x = 25,7$  м, рассчитанная по формуле (39), изображена на рис. 5.

Имея в виду двухслойную аппроксимацию стратификации, условия «твёрдой крышки» на поверхности и приближение мелкой воды, из закона сохранения массы в каждом слое

$$\partial_t(h_1 + \eta) + \partial_x[(h_1 + \eta)U] = 0$$

получаем связь найденных выше решений  $\eta_N$  с полем скорости на поверхности  $U(x, t)$  для указанных выше параметров модели:

$$U[\text{м/с}] = 0,45 \frac{\eta_9(\text{м})/7}{1 + \eta_9(\text{м})/7}. \quad (40)$$

На основе полученных приближённых расчётов для группы из 9-ти импульсов — солитонов внутренних волн, соответствующих наблюдениям «СОРЕ», восстанавливалось поле скорости на поверхности, которое затем использовалось для расчётов модуляции спектральной плотности поля возвышения коротких волн.

#### 4.2. Ветровой пограничный слой над водной поверхностью с неоднородным полем течений

Описание ветрового пограничного слоя над взволнованной водной поверхностью, как и в случае взаимодействия с волнами зыби, проведём в рамках системы (19а), (19б) и (11). Однако в отличие от длинных поверхностных волн смещение поверхности во внутренних волнах практически отсутствует. В связи с этим, «длинноволновое» преобразование координат, введённое в разделе 3, не проводилось.

Вид уравнений для крупномасштабного течения будет совпадать с (8) с точностью до замены  $(s, \gamma) \rightarrow (x, z)$ , только в правой части аналогично (12а), (12б) будет стоять слагаемое  $\partial^2 \tau / \partial \gamma^2$ , где  $\tau$  — волновой поток импульса. При слабых ветрах, когда вклад волнового потока импульса в перенос в ветровом турбулентном погранслое мал [30], этим слагаемым можно пренебречь. При сильных ветрах влияние волнового потока импульса можно учесть, если использовать модифицированное выражение для эффективной вихревой вязкости [19] (см. формулу (7)).

При этих предположениях система уравнений для крупномасштабных возмущений совпадает с (8) с точностью до замены  $z \rightarrow \gamma$ ,  $x \rightarrow s$ . Принимая во внимание, что поле скорости  $U(s, t)$  представляет собой стационарную волну, т. е.  $U = U(s - ct)$ , и переходя в систему координат, бегущую со скоростью  $c$ , получим систему стационарных уравнений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \frac{\partial \chi}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \chi}{\partial \gamma} = \Delta(\nu \chi) - 2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}, \quad \Delta \psi = \chi. \quad (41)$$

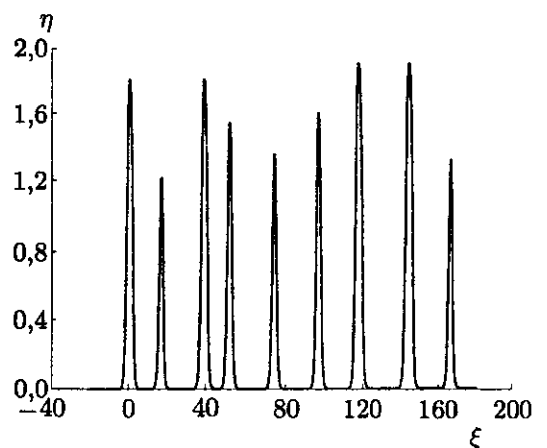


Рис. 5. Зависимость смещения изоопикны во внутренней волне от горизонтальной координаты  $\xi = x/L_x$

При этом граничные условия (9) аналогично (10в), (10г) преобразуются к виду

$$\psi|_{\gamma=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = U(s) - c. \quad (42)$$

При удалении от поверхности поле скорости стремится к невозмущённому логарифмическому профилю, т. е.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma \rightarrow \infty} = \frac{u_*}{0,4} \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} - c.$$

Оценки, приведённые в [10], показывают, что длинноволновые возмущения, индуцированные внутренними волнами в воздухе, можно рассматривать в линейном приближении. Тогда система уравнений для возмущений имеет вид

$$(U_0(\gamma) - c) \frac{\partial \chi_1}{\partial s} - \frac{d^2 U_0}{d\gamma^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \Delta(\nu(\gamma)\chi_1) - 2 \frac{d^2 \nu}{d\gamma^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2}, \quad \Delta \psi_1 = \chi_1, \quad (43)$$

$$\psi_1|_{\gamma=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = U(s), \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma \rightarrow \infty} = 0,$$

где  $U_0(\gamma) = -c + \int_0^\gamma [u_*^2/\nu(z)] dz$ . Если  $\nu(z)$  определяется формулой (7), то при  $\gamma \rightarrow 0$  имеем асимптотику  $U_0(\gamma) = -c + (u_*/\kappa) \ln(\gamma/\gamma_0)$ .

Для решения таких уравнений можно использовать численную схему, описанную в [21] и модифицированную на случай негармонического возмущения.

Будем искать решение системы (43) в виде интеграла Фурье:

$$\begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \psi_1 \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \chi_{1k}(\gamma) \\ \psi_{1k}(\gamma) \end{Bmatrix} \exp(iks) dk.$$

Тогда  $\chi_{1k}, \psi_{1k}$  удовлетворяют следующей системе уравнений и граничных условий:

$$(U_0(\gamma) - c) \chi_{1k} - \frac{d^2 U_0}{d\gamma^2} \psi_{1k} = \frac{1}{ik} \left[ \left( \frac{d^2}{d\gamma^2} - k^2 \right) (\nu(\gamma)\chi_{1k}) + 2 \frac{d^2 \nu}{d\gamma^2} k^2 \psi_{1k} \right],$$

$$\frac{d^2 \psi_{1k}}{d\gamma^2} - k^2 \psi_{1k} = \chi_{1k},$$

$$\psi_{1k}|_{\gamma=0} = 0, \quad \frac{d\psi_{1k}}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} = \hat{U}(k), \quad \psi_{1k}|_{\gamma \rightarrow \infty} = 0; \quad (44)$$

здесь  $\hat{U}(k)$  — фурье-образ  $U(s)$ .

Система уравнений (44) для  $k$ -й гармоники решалась численно. При этом оказалось, что форма решения на масштабах порядка толщины вязкого подслоя мало зависит от  $k$ . В этом случае, вычисляя обратное преобразование Фурье от полученного решения, можно представить поле скорости возмущения, индуцированного в воздухе полем внутренней волны, в виде

$$U(s, \gamma) = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = U(s) \operatorname{Re} \left( \frac{d\psi_{1k}}{d\gamma} \right) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s')}{s-s'} ds' \operatorname{Im} \left( \frac{d\psi_{1k}}{d\gamma} \right), \quad (45)$$

где  $\psi_{1k}$  — решение уравнения (44) с граничным условием  $d\psi_{1k}/d\gamma = 1$  при любом достаточно малом  $k$ .

Входящие в (44) индуцированное волной поле завихренности  $\chi = \partial U / \partial \gamma$ , а также  $\chi_\gamma = \partial^2 U / \partial \gamma^2$  легко вычисляются с использованием (45).

#### 4.3. Модуляция коротких ветровых волн в поле ветра над морской поверхностью при наличии внутренней волны

Изменение спектральной плотности энергии коротких поверхностных волн  $F(K, x, t)$  описывается кинетическим уравнением (1). Прежде чем переходить к расчётам функции  $F$ , сделаем оценки слагаемых в уравнении (1) для параметров внутренних и поверхностных волн настоящей задачи. Слагаемое в левой части, описывающее кинематические эффекты, имеет порядок  $Fc/L_x$ , где  $c$  — фазовая скорость внутренней волны ( $c = 50$  см/с), а  $L_x$  — её характерный масштаб ( $L_x \approx 25$  м); тогда  $Fc/L_x \sim 2 \cdot 10^{-2} F$ . Правая часть уравнения (1) описывает эффекты, обусловленные генерацией волн ветром и нелинейным взаимодействием волн. В сантиметровом диапазоне длин поверхностных волн имеет место баланс этих эффектов [26], поэтому правую часть уравнения (1) можно оценить с использованием инкремента поверхностных волн [31]  $\beta = (0,02 \div 0,04) (u_*^2 / C_f^2) \Omega - 2\nu_w K^2$ , где  $\nu_w = 0,01$  см<sup>2</sup>/с — кинематическая вязкость воды. Если волновое число короткой волны  $K = 3$  см<sup>-1</sup>, то  $\Omega \sim 70$  с<sup>-1</sup>,  $C_f \sim 23$  см/с, и при  $u_* = 20$  см/с имеем  $\beta \sim 1$  с<sup>-1</sup>, а при  $u_* = 10$  см/с —  $\beta \sim 0,1$  с<sup>-1</sup>, поскольку такая скорость трения ветра близка к порогу генерации. Отсюда следует, что левая часть, описывающая кинематические эффекты в поле коротких волн, мала, и основную роль в модуляции коротких волн играет модуляция их инкремента.

Для расчёта модуляции инкремента коротких волн при наличии внутренней волны воспользуемся системой уравнений для коротких волн при наличии длинных волн, аналогичной той, которая применялась в разделе 3. В линейном приближении комплексные амплитуды гармоник возмущений функции тока  $\psi_2$  и завихренности  $\chi_2$  с волновым числом  $K$  удовлетворяют системе уравнений, совпадающей с (28) при  $y_{1\gamma} = 0$  с точностью до замены  $\eta \rightarrow \gamma$ :

$$\begin{aligned} \left[ \left[ \left( \Phi_{0\gamma} - \frac{\Omega}{K} \right) \chi_2 - \psi_2 \chi_{0\gamma} \right] iK - \left( \frac{d^2}{d\gamma^2} - K^2 \right) (\chi_2 \nu) \right] = \\ = -2\nu_{\gamma\gamma} \psi_2 K^2 - 2KA \exp(-K\gamma) \left[ \left( \Phi_{0\gamma} - \frac{\Omega}{K} \right) \nu_\gamma \right]_\gamma, \\ \frac{d^2 \psi_2}{d\gamma^2} - K^2 \psi_2 = \chi_2 - 2KA \exp(-K\gamma) \chi_0. \end{aligned} \quad (46)$$

Граничные условия имеют вид

$$\psi_2|_{\gamma=0} = 0, \quad \psi_{2\gamma}|_{\gamma=0} = 2\Omega A. \quad (47)$$

В отличие от (28), здесь  $\Phi_{0\gamma}$  и  $X_0$  выражаются явно:  $\Phi_{0\gamma} = U_0(\gamma) + U(s, \gamma) - \Omega/K$ , где  $U(s, \gamma)$  определяется формулой (45),  $\chi_0 = \Phi_{0\gamma\gamma}$ ,  $A$  — амплитуда короткой поверхностной волны.

В системе (46) и граничных условиях (47) можно пренебречь зависимостью волнового числа  $K$  и фазовой скорости  $C_f$  короткой поверхностной волны от фазы внутренней волны, поскольку в рассматриваемом диапазоне параметров кинематические эффекты малы по сравнению с влиянием взаимодействия с ветром.

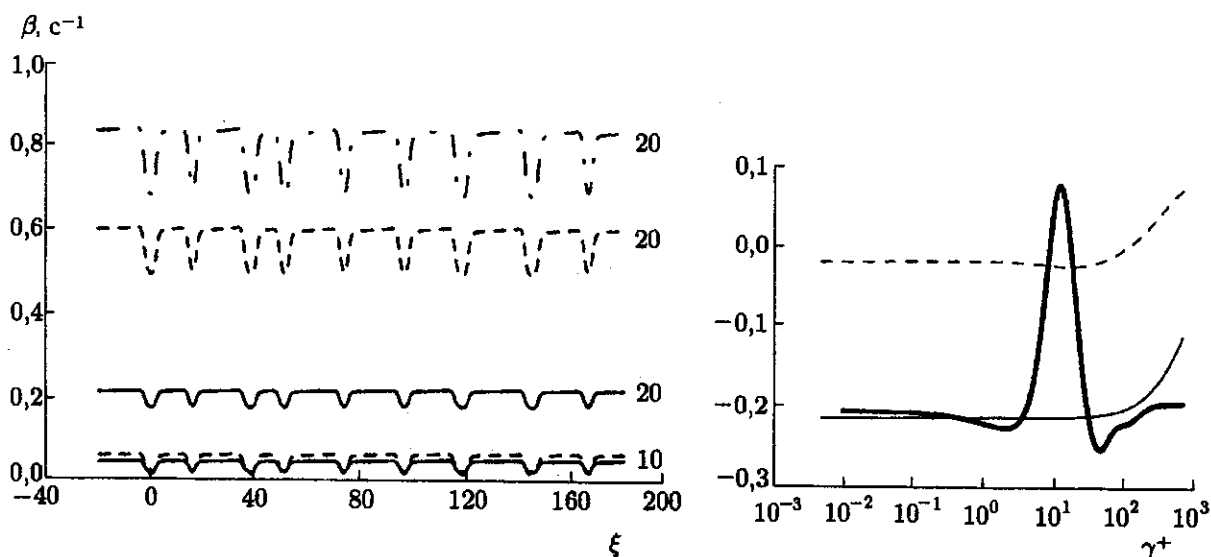


Рис. 6а. Зависимости инкремента  $\beta$  от горизонтальной координаты  $\xi = x/L_x$  ( $L_x = 25,7$  м). Направление фазовой скорости внутренней волны совпадает с направлением ветра. Сплошные кривые соответствуют  $K = 1 \text{ см}^{-1}$ , штриховые —  $K = 2 \text{ см}^{-1}$ ; штрих-пунктирная —  $K = 3 \text{ см}^{-1}$ . Цифры у графиков соответствуют скорости трения ветра (в см/с). На правом графике показаны профили реальной (сплошная линия) и мнимой (штриховая линия) частей возмущения тангенциального напряжения ветра, индуцированного длинной гармонической волной. Жирная кривая — плотность мощности энергообмена короткой волны с ветром (в относительных единицах)

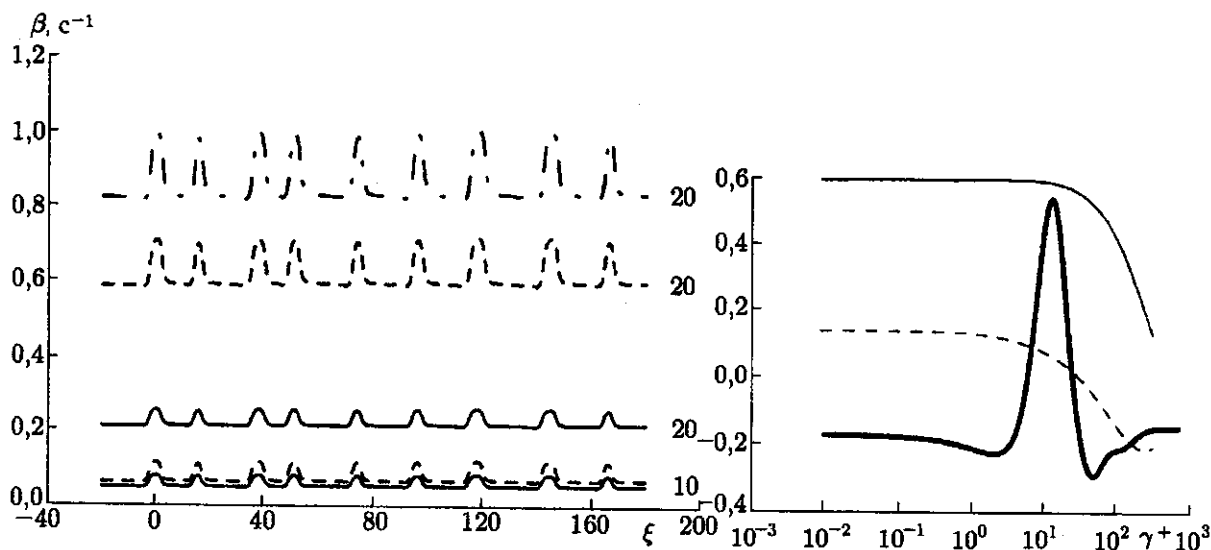


Рис. 6б. То же, что на рис. 6а, для случая, когда фазовая скорость внутренней волны направлена против ветра

Находя решение системы (46), можно вычислить ветровой инкремент коротких волн по формуле

$$\beta_w = \frac{\rho_a}{2\rho_w} \nu_a \left[ -\frac{\text{Re}(\chi_{2\gamma} - K\chi_2)}{C_f KA} + 4K^2 \right]. \tag{48}$$

При этом полный инкремент короткой волны, модулированной внутренней волной, имеет вид

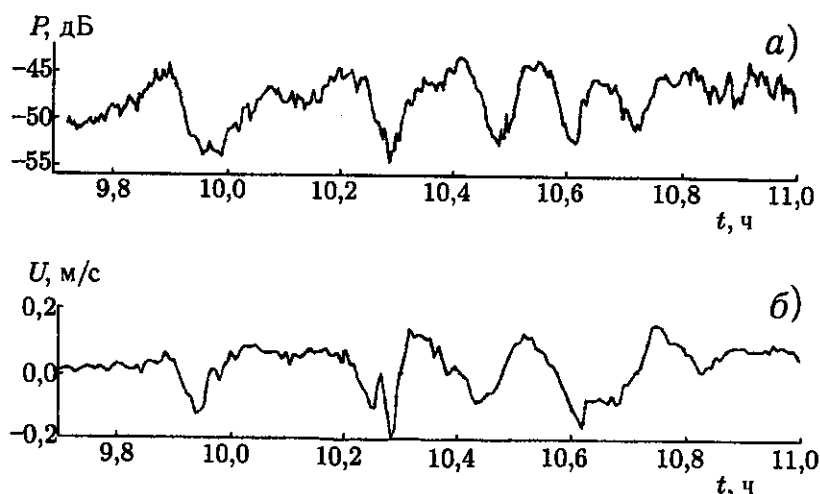


Рис. 7. Зависимости мощности рассеянного радиосигнала (а) и горизонтального потока на глубине 30 м (б) от времени (по данным [32])

$$\beta = -2\nu_w K^2 + \beta_w.$$

Зависимости  $\beta$  от фазы волны представлены на рис. 6а, б для случаев, когда внутренняя волна распространяется по ветру (рис. 6а) и против ветра (рис. 6б). Сравнение с рис. 5, на котором изображена зависимость смещения изопикн во внутренней волне от  $\xi$ , показывает, что максимум смещения (и горизонтальной скорости) совпадает с минимумом инкремента ветровых волн при попутном ветре (рис. 6а) и с максимумом их инкремента при встречном ветре (рис. 6б). Для пояснения этого эффекта на рис. 6 представлены также профили реальной ( $\text{Re } T_1$ ) и мнимой ( $\text{Im } T_1$ ) частей возмущения тангенциального напряжения в ветре, индуцированного гармонической внутренней волной с волновым числом  $k = 0,25 \text{ м}^{-1}$ . На том же рисунке показан профиль средней по периоду волны плотности мощности сил (радиационной и вязкой), определяющих поток энергии от ветра к волнам [22]. Видно, что в области максимального энергообмена возмущения потока импульса практически постоянны и имеют фазу, близкую к  $-\pi$  при попутном ветре и близкую к нулю при встречном ветре. Поскольку в области существенного энергообмена  $T_1$  не зависит от вертикальной координаты, профиль скорости ветра в этой области с хорошей степенью точности можно представить в виде

$$U_0(z) = \left( \frac{u_*}{0,4} + \text{Re} \frac{T_1 k a \exp(ikx)}{0,4u_*^2} \right) \ln \frac{z}{z_0}.$$

Таким образом, колебания эффективной скорости ветра находятся в противофазе со скоростью на поверхности в случае попутного ветра и синфазны при встречном ветре. Этот эффект допускает и простое физическое объяснение: перепад скорости между поверхностью воды и вышележащими слоями ветрового пограничного слоя меньше в случае, если на поверхности воды есть течение, сонаправленное с ветром, а меньший перепад скорости приводит к меньшему напряжению трения. При противоположном направлении скоростей ветра и поверхности воды напряжение трения оказывается существенно больше.

В случае, когда в области энергообмена ветровой волны с воздушным потоком возмущение тангенциального напряжения в ветре  $T_1$  практически постоянно, модуляция ветрового инкремента полностью определяется модуляцией  $T_1$ . Это и объясняет зависимости  $\beta(\xi)$ .

Применим результаты развитой модели для оценки данных эксперимента «COPE», в ходе которого проводились одновременные измерения интенсивности радиоизлучения, рассеянного морской поверхностью, и колебаний термоклина на шельфе вблизи побережья штата Орегон [32]. Было обнаружено, что минимумы рассеянной мощности радиосигнала находятся приблизительно в фазе со смещениями термоклина. Такое же фазовое соотношение между модулированным ветровым инкрементом коротких поверхностных волн и смещением изопикны во внутренней волне получается при распространении внутренней волны по ветру (рис. 6а).

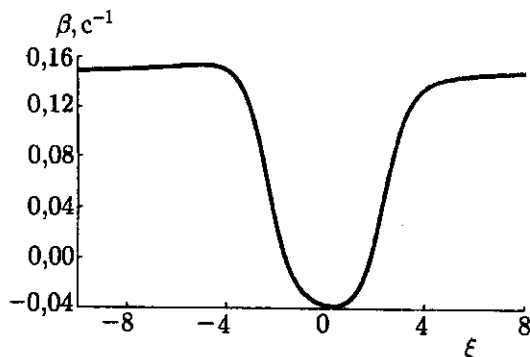


Рис. 8. Зависимость модулированного инкремента поверхностной волны от горизонтальной координаты  $\xi$ . Параметры ветра и волн соответствуют условиям 23 сентября 1995 г. (по данным [32]). Волновое число поверхностной волны  $K = 4 \text{ см}^{-1}$

Для сопоставления с результатами настоящей модели используем параметры ветра и волн, измеренные в ходе эксперимента «COPE» 23 сентября 1995 г. На рис. 7 представлены данные о горизонтальной скорости течения, обусловленной внутренними волнами, под термоклинном и о мощности рассеянного сигнала для этого случая. Заметим, что смещение изопикны находится в противофазе со скоростью течения под термоклинном, т. е. и в этом случае минимум рассеянного сигнала совпадает с максимумом смещения изопикны. При этом скорость ветра составляла  $9,5 \text{ м/с}$  ( $u_* \approx 28,5 \text{ см/с}$ ), а угол между направлениями скорости ветра и распространения волны составлял  $\theta \approx 60^\circ$ . Скорость распространения внутренних волн составляла  $c_{вв} = 1,03 \text{ м/с}$ . Измерения проводились с помощью радиолокатора с длиной волны излучения  $\lambda = 3 \text{ см}$  под скользящими углами, т. е. брэгговская длина волны составляла  $1,5 \text{ см}$ .

Были проведены расчёты модулированного инкремента брэгговских волн в рамках настоящей модели для указанных параметров. Заметим, что в модели скорости ветра и волн считаются сонаправленными. Поскольку направление визирования радиолокатора совпадало с направлением распространения внутренней волны, то для оценок в качестве значения скорости на поверхности во внутренней волне бралось  $c_{вв} = 1,03 \text{ м/с}$ , а для скорости трения ветра выбиралось значение  $u_{*1} = u_* \cos \theta \approx 14,3 \text{ см/с}$ . Рассчитанный модулированный инкремент представлен на рис. 8. Видно, что фаза модуляции инкремента противоположна фазе смещения изопикны, при этом в максимуме смещения изопикны даже наблюдается смена знака инкремента.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена описанию одного из механизмов модуляции коротких поверхностных волн при наличии неоднородных течений. Хорошо известно, что неоднородные течения на поверхности воды индуцируют неоднородности в поле ветра, что, в свою очередь, приводит к неоднородности генерации ветровой ряби, т. е. к модуляции ветрового инкремента поверхностных волн. Впервые этот механизм был рассмотрен в случае, когда неоднородное течение вызывалось длинной волной на поверхности воды [5]. Однако построение последовательной теории этого механизма модуляции коротких волн встречало значительные трудности, связанные, прежде всего, с определением фазы коэффициента модуляции поверхностных волн, которая в эксперименте была близка к нулю, а в теории оказывалась близкой к  $-\pi$ . Учёт в теории нелинейного эффекта деформации профиля ветра при наличии поверхностных волн позволяет объяснить значения как

амплитуды, так и фазы коэффициента модуляции спектра поверхностных волн.

Механизм модуляции инкремента поверхностных волн оказывается эффективным и в случае, когда неоднородное поле течений на поверхности создаётся интенсивными внутренними волнами. Следует заметить, что в настоящей работе влияние модуляции инкремента рассматривалось без учёта консервативной кинематической трансформации поверхностных волн. В то же время ранее в работе [33] была изучена модуляция коротких поверхностных волн в поле интенсивных внутренних волн без учёта модуляции инкремента и показано, что в случае очень интенсивных внутренних волн значительный гидродинамический контраст существует даже для волн сантиметрового диапазона. Дальнейшим шагом будет исследование совместного действия двух указанных эффектов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-05-65099) и школы академика В. И. Таланова (ИШ-1637.2003.2).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басович А. Я., Баханов В. В., Таланов В. И. // Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. С. 8.
2. Басович А. Я., Баханов В. В., Браво-Животовский Д. М., Гордеев Л. Б., Жидко Ю. М., Мукшин С. И. // Доклады АН СССР. 1988. Т. 298, № 4. С. 967.
3. Ермаков С. А., Салашин С. Г. // Доклады АН СССР. 1994. Т. 337, № 1. С. 108.
4. Булатов М. Г. и др. // Успехи физических наук. 2003. Т. 173. С. 69.
5. Landahl M. T., Widnall S. E., Hultgen L. // Proc. 12th Symp. on Naval Hydrodynamics. National Academy of Sciences. 1978. 541 p.
6. Hasselman K. et al. // J. Geophys. Res. 1985. V. 90. P. 4659.
7. Гродский С. А., Кудрявцев Е. Н., Макин Е. К. // Морской гидрофиз. журн. 1991. № 1. С. 15.
8. Троицкая Ю. И. Модуляция скорости роста короткой поверхностной волны, возбуждаемой турбулентным ветром в присутствии длинной: Препринт ИПФ РАН № 391. Н. Новгород, 1996. 38 с.
9. Троицкая Ю. И. Квазилинейная модель модуляции коротких поверхностных волн, возбуждаемых турбулентным ветром в присутствии волны зыби: Препринт ИПФ РАН № 544. Н. Новгород, 2000. 30 с.
10. Горшков К. А., Долина И. С., Соустова И. А., Троицкая Ю. И. Модуляция коротких ветровых волн в присутствии интенсивных внутренних волн. Эффект модуляции инкремента: Препринт ИПФ РАН № 607. Н. Новгород, 2002. 27 с.
11. Stanton T. P., Ostrovsky L. A. // Geophys. Rev. Lett. 1998. V. 25. P. 2695.
12. Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W. // J. Fluid Mech. 1960. V. 8, No. 4. P. 565.
13. Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W. // J. Fluid Mech. 1961. V. 10, No. 4. P. 529.
14. Longuet-Higgins M. S. // J. Fluid Mech. 1987. V. 177. P. 293.
15. Keller W. C., Wright J. W. // Radio Sci. 1975. V. 10. P. 139.
16. Smith J. A. // Surface Waves and Fluxes. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1990. V. 1. P. 247.
17. Монин А. С., Яглом Ф. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. С.-Пб.: Гидрометеиздат, 1992. 696 с.
18. Смольяков А. В. // Акуст. журн. 1973. Т. 19, вып. 3. С. 420.
19. Riley D. S., Donelan M. A., Hui W. H. // Boundary Layer Meteor. 1982. V. 22. P. 209.
20. Jenkins A. D. // J. Phys. Oceanogr. 1992. V. 22, No. 8. P. 843.
21. Реутов В. П., Троицкая Ю. И. // Изв. РАН. ФАО. 1995. Т. 31, № 6. С. 623.

22. Троицкая Ю. И. // Изв. РАН. ФАО. 1997. Т. 33, № 4. С. 525.
23. Вопросы теории плазмы. Вып. 7. М.: Энергоатомиздат, 1973.
24. Benjamin Brooke T. // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. P. 161.
25. Hasselman K. et al. // Dtsch. Hydrogr. Z. Reihe A. 1973. V. 8. P. 12.
26. Plant W. J., Keller W. C., Cross A. // J. Geophys. Res. 1983. V. 88. P. 9747.
27. Gorshkov K. A., Irisov V. G., Ostrovsky L. A., Soustova I. A. Multisoliton solutions of Gardner equation and their applications (in press).
28. Горшков К. А., Соустова И. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 5–6. С. 502.
29. Grue J., Ostrovsky L. A. Strongly nonlinear internal solitons — analytical models and fully nonlinear computations (in press).
30. Kudryavtsev V. N., Mastenbroek C., Makin V. K. // Boundary Layer Meteor. 1997. V. 83. P. 99.
31. Plant W. // J. Geophys. Res. 1982. V. 87. P. 1961.
32. Kropfli R. A. et al. // J. Geophys. Res. 1999. V. 104. P. 3133.
33. Bakhanov V. V., Ostrovsky L. A. The action of strong solitary internal waves on surface waves: Preprint IAP RAS No. 573. Nizhni Novgorod, 2001. 26 p.

Институт прикладной физики РАН,  
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
6 июня 2003 г.

#### TRANSFORMATION OF SHORT WAVES IN A NONUNIFORM FLOW FIELD ON THE OCEAN SURFACE. THE EFFECT OF WIND GROWTH RATE MODULATION

*K. A. Gorshkov, I. S. Dolina, I. A. Soustova, and Yu. I. Troitskaya*

We develop a model of transformation of the short surface wave spectrum in the presence of a nonuniform flow on a water surface, in which the modulation of wind-wave growth rate is taken into account. The model of a turbulent near-water atmospheric layer is used to calculate the modulate growth rate. In this model, turbulent stresses in a wind are described using a gradient approximation with a model eddy viscosity specified with allowance for the known laboratory experiments. The examples of short-wave modulation in the presence of nonuniform flows on a water surface, originating from ripples and intense internal waves, are considered. It is shown that deformations of the wind-velocity profile and its long-wavelength perturbation due to the nonlinear interaction between the wind surface waves and wind has a significant effects on the short-wave growth rate and its modulation. In the case of ripples, this deformation reduces to an increase in the roughness parameter of the wind-velocity profile and to a velocity-profile modulation with the ripple period. The modulated growth rate is calculated within the framework of a quasi-linear model of surface-wave generation by a turbulent wind, in which the hypothesis of random phases of the wind-wave field is used. The amplitude and phase of the hydrodynamical transfer function are calculated within the framework of the relaxation model. The calculation results are in reasonable agreement with the available experimental data. A model described by the combined Korteweg–de Vries equation is used to study a surface flow field generated by intense internal waves. The internal-wave parameters are takes from the results of the COPE experiment. We calculate the wind growth rate dependences on the wave-train phase for co- and counterpropagation of an internal wave with respect to the wind. The calculation results agree qualitatively with experimental data.